



Ministério da Ciência e Tecnologia  
República Federativa do Brasil

Nota Técnica

NOTA SOBRE A RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA TEMPORAL ENTRE  
AS EMISSÕES DE GASES DE EFEITO ESTUFA E A MUDANÇA DO  
CLIMA

**Luiz Gylvan Meira Filho**  
*Presidente da*  
*Agência Espacial Brasileira*

**José Domingos Gonzalez Miguez**  
*Secretário Executivo da*  
*Comissão Interministerial de Mudança Global do Clima*

*Janeiro de 2000*

## 1. Introdução

A relação entre as emissões antrópicas líquidas de gases de efeito estufa (emissões<sup>1</sup>) e a mudança resultante no clima é relevante por várias razões.

Os tratados internacionais que tratam da mitigação da mudança do clima permitem aos países atingir seus objetivos de limitação e redução quantificadas de emissões por meio de medidas de limitação da emissão de diferentes gases de efeito estufa. Faz-se necessário, portanto, ter uma medida que permita a adição das emissões de diferentes gases de efeito estufa.

A avaliação da responsabilidade relativa dos diversos países requer a estimativa da mudança do clima resultante das emissões de diferentes fontes no decorrer de diferentes períodos de tempo.

Os formuladores de políticas do governo e do setor privado confrontam-se com a escolha entre estratégias alternativas que resultem no *mix* de emissões de gases de efeito estufa ao longo do tempo. A escolha requer uma ferramenta que estime o resultado de cada opção em termos do clima futuro.

Esta nota aborda o problema do estabelecimento da relação de dependência temporal entre as emissões e a mudança do clima, expressando da forma mais simples possível a complexa dependência do aumento da temperatura média da superfície global (aumento da temperatura<sup>2</sup>) em relação às emissões.

Adota-se que o aumento de temperatura  $\Delta T$  no tempo  $t$ , como uma função das emissões passadas  $\varepsilon(t')$  e de todas as outras variáveis  $\vec{x}$ , é invariante com relação à operação de adição, ou seja:

$$\Delta T (\varepsilon_1(t') + \varepsilon_2(t'), \vec{x}, t) = \Delta T (\varepsilon_1(t'), \vec{x}, t) + \Delta T (\varepsilon_2(t'), \vec{x}, t) \quad (1)$$

A aceitação do conceito de emissões equivalentes de dióxido de carbono implica a aceitação dessa suposição. Por conseguinte,

---

<sup>1</sup> Nesta nota, a palavra emissões refere-se, para fins de concisão, às emissões antrópicas líquidas de gases de efeito estufa ou a diferença entre as emissões antrópicas por fontes e as remoções antrópicas por sumidouros de gases de efeito estufa.

<sup>2</sup> Nesta nota, a expressão aumento da temperatura refere-se, para fins de concisão, ao aumento da temperatura média da superfície global resultante das emissões antrópicas líquidas de gases de efeito estufa.

em particular, as emissões de diferentes fontes podem ser somadas para o mesmo gás, uma vez que isso é aceito para gases diferentes. A questão importante é como lidar com a dependência no tempo do efeito das emissões, por ser diferente para os diversos gases de efeito estufa. A dependência no tempo da relação entre as emissões e a mudança do clima é tratada de forma explícita nesta nota.

O uso do aumento da temperatura como medida da mudança do clima não é único. O aumento do nível médio do mar e a taxa de variação no tempo da temperatura também são indicadores globais da mudança do clima. A taxa de variação do aumento da temperatura e a extensão da formulação ao aumento do nível médio do mar também são consideradas nesta nota.

O Potencial de Aquecimento Global (GWP) proposto pelo Painel Intergovernamental sobre Mudança do Clima (IPCC) é um fator de ponderação para somar impulsos de emissões dos diferentes gases de efeito estufa, de forma que produzam resultados equivalentes em termos do aumento da temperatura após um período de tempo específico. Mostra-se nesta nota que o GWP do IPCC é um caso especial de potencial de aquecimento global generalizado.

A proposta apresentada pelo Governo do Brasil para o Protocolo de Quioto incluía, para fins de ilustração, um modelo para “formuladores de políticas” relacionando as emissões ao aumento da temperatura. Mostra-se que o modelo para “formuladores de políticas” também é um caso especial da formulação geral.

## **2. Relação entre emissões, concentração adicional, forçamento radiativo médio e aumento da temperatura**

Os fatores significativos que afetam a dependência temporal da relação entre as emissões e o aumento da temperatura são o decaimento da concentração atmosférica adicional de gases de efeito estufa (concentração adicional<sup>3</sup>) e o ajuste transiente do aumento da temperatura a uma concentração alterada de gases de efeito estufa.

Para a maioria dos gases de efeito estufa, a dependência em relação ao tempo da concentração adicional segue um decaimento exponencial simples.

---

<sup>3</sup> Nesta nota, a expressão concentração adicional refere-se, para fins de concisão, à concentração atmosférica adicional de gases de efeito estufa devida às emissões antrópicas líquidas de tais gases.

No caso do dióxido de carbono, o decaimento complexo da concentração adicional com o tempo é aproximado por uma soma das funções que decaem exponencialmente, uma para cada fração das concentrações adicionais.

Para uma concentração adicional constante de um gás de efeito estufa, há uma relação linear entre essa concentração adicional e o aumento da temperatura no equilíbrio de longo prazo. Contudo, a fim de considerar a dependência em relação ao tempo é necessário considerar o ajuste transiente do aumento da temperatura à concentração adicional. Tal ajuste também é aproximado por uma soma de leis exponenciais, com frações correspondentes a diferentes constantes de tempo.

Todos os outros fatores que determinam a relação entre as emissões e o aumento da temperatura não são ignorados, mas englobados nas constantes.

As não-linearidades, como, por exemplo, a dependência não-linear da seção transversal de absorção na faixa do infravermelho do dióxido de carbono em relação à concentração atmosférica, são ignoradas e não devem afetar as conclusões relativas obtidas com a formulação simplificada, quanto à importância relativa dos diferentes gases ou à contribuição relativa das diferentes fontes.

Um impulso de emissão de um gás de efeito estufa não resulta em um aumento instantâneo da mesma magnitude, devido à remoção de uma fração do gás emitido em uma escala de tempo mais curta do que a escala anual utilizada. Esse fato é levado em conta estipulando-se um fator que é aplicado às emissões ao computar a concentração adicional resultante.

A relação de dependência temporal entre as emissões e a concentração adicional de um gás de efeito estufa  $g$  é dada, em sua forma mais simples, por:

$$\Delta\rho_g(t) = \beta_g \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \left[ \sum_{r=1}^R f_{gr} e^{-(t-t')/\tau_{gr}} \right] dt' \quad (2)$$

onde:

$\Delta\rho_g(t)$  é a concentração adicional do gás de efeito estufa  $g$  resultante das emissões em épocas anteriores;

$\beta_g$  é o aumento da concentração do gás de efeito estufa  $g$  por unidade de emissão anual desse gás;

$\varepsilon_g(t)$  é a emissão anual do gás de efeito estufa  $g$  no tempo  $t$ ;

$R$  é o número total de frações da concentração adicional;

$\tau_{gr}$  é a constante de tempo do decaimento exponencial da  $r$ -ésima fração  $f_{gr}$  da concentração adicional do gás de efeito estufa  $g$ .

$f_{gr}$  é a  $r$ -ésima fração da concentração adicional do gás de efeito estufa  $g$ , decaindo exponencialmente com uma constante de tempo  $\tau_{gr}$ .

Impõe-se a restrição de que:

$$\sum_{r=1}^R f_{gr} = 1 \quad (3)$$

Para o dióxido de carbono, o decaimento é aproximado por 5 funções exponenciais ( $R=5$ ); para todos os outros gases de efeito estufa, um decaimento exponencial simples é adotado ( $R = 1$  e  $f_{g1} = 1$ ).

Uma constante efetiva do tempo do decaimento  $\bar{\tau}_g$  é definida como a média ponderada das constantes de tempo do decaimento:

$$\bar{\tau}_g = \sum_{r=1}^R f_{gr} \tau_{gr} \quad (4)$$

A representação do decaimento por uma soma das funções exponenciais é apenas uma aproximação empírica aos dados de observação. Não há sentido, portanto, em um único decaimento exponencial com a constante efetiva do decaimento do tempo  $\bar{\tau}_g$ . Entretanto, essa definição é útil como constante em algumas das expressões.

Para os gases de efeito estufa com decaimento exponencial da concentração adicional, o fato de que as emissões são especificadas como valores anuais implica um valor de  $\beta$  diferente de um; de fato, se as emissões são constantes em um período de comprimento  $\Delta T$ , a concentração adicional no final do período é:

$$\begin{aligned}\Delta\rho_g &= \varepsilon_g \int_0^{\Delta T} e^{-t/\tau_g} dt \\ &= \varepsilon_g \tau_g \left(1 - e^{-\Delta T/\tau_g}\right)\end{aligned}\quad (5)$$

ou, para o período de um ano e constante de tempo  $\tau_g$  expressa em anos,

$$\beta_g = \tau_g \left(1 - e^{-1/\tau_g}\right) \quad (6)$$

A relação entre a concentração adicional do gás de efeito estufa  $g$  e o aumento resultante no forçamento radiativo médio é dada por:

$$\Delta\bar{Q}_g(t) = \bar{\sigma}_g \Delta\rho_g(t) \quad (7)$$

onde:

$\Delta\bar{Q}_g(t)$  é a taxa média de deposição de energia sobre a superfície da terra, ou forçamento radiativo médio, por unidade de concentração adicional do gás de efeito estufa  $g$ ;

$\bar{\sigma}_g$  é a variação no forçamento radiativo médio por unidade de concentração adicional do gás de efeito estufa  $g$ .

A relação de dependência temporal entre o forçamento radiativo médio e o resultante aumento da temperatura pode ser aproximada considerando os resultados dos modelos climáticos completos e ajustando as funções exponenciais aos seus resultados. Tais resultados indicam que a resposta do aumento da temperatura a uma duplicação instantânea da concentração de dióxido de carbono e, portanto, do forçamento radiativo médio pode ser aproximada por uma função do tipo:

$$\Delta T_g(t) = \text{constante} \left[ 1 - \sum_{s=1}^S l_s e^{-t/\tau_{cs}} \right] \quad (8)$$

Por conseguinte, a função de resposta a um impulso de concentração adicional é sua derivada no tempo:

$$\Delta T_g(t) = \text{constante} \left[ \sum_{s=1}^S \frac{l_s}{\tau_{cs}} e^{-t/\tau_{cs}} \right] \quad (9)$$

A relação de dependência no tempo entre o forçamento radiativo médio e o resultante aumento da temperatura é dada, então, por:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \int_{-\infty}^t \Delta \bar{Q}_g(t') \left[ \sum_{s=1}^S l_s (1/\tau_{cs}) e^{-(t-t')/\tau_{cs}} \right] dt' \quad (10)$$

onde:

C é a capacidade térmica do sistema climático;

S é o número total de frações do forçamento radiativo;

$l_s$  é a s-ésima fração do forçamento radiativo que atinge ajuste exponencialmente com uma constante de tempo  $\tau_{cs}$ .

Impõe-se a restrição de que:

$$\sum_{s=1}^S l_s = 1 \quad (11)$$

$\tau_{cs}$  é a constante de tempo de ajuste exponencial da s-ésima fração  $l_s$  do aumento da temperatura.

Uma constante efetiva do tempo de ajuste do aumento da temperatura  $\bar{\tau}_c$  é definida como o inverso da média ponderada do inverso das constantes do tempo de ajuste do aumento da temperatura. Aqui, novamente, esse conceito é útil mesmo não havendo sentido para uma função exponencial com essa constante de tempo.

$$\bar{\tau}_c = \frac{1}{\sum_{s=1}^S l_s (1/\tau_{cs})} \quad (12)$$

A combinação das expressões (7) e (10) fornecem a relação entre a concentração adicional do gás de efeito estufa g e o resultante aumento da temperatura:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \bar{\sigma}_g \int_{-\infty}^t \Delta \rho_g(t') \left[ \sum_{s=1}^S l_s (1/\tau_{cs}) e^{-(t-t')/\tau_{cs}} \right] dt' \quad (13)$$

A combinação das expressões (2) e (13) resulta em uma expressão relacionando as emissões do gás de efeito estufa g diretamente ao aumento da temperatura:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \bar{\sigma}_g \beta_g \int_{-\infty}^t \left\{ \int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_g(t'') \left[ \sum_{r=1}^R f_{gr} e^{-(t'-t'')/\tau_{gr}} \right] dt'' \right\} \left[ \sum_{s=1}^S l_s (1/\tau_{cs}) e^{-(t-t')/\tau_{cs}} \right] dt'$$

(14)

### 3. Funções normalizadas de resposta

As relações apresentadas na seção anterior podem ser expressas em termos de uma constante, específica para cada gás, multiplicada por uma função normalizada de resposta representando a dependência temporal. A normalização é diferente para cada função de resposta: a constante adequada é escolhida de forma que as funções normalizadas de resposta para os diferentes gases de efeito estufa sejam de magnitude semelhante.

A introdução das funções normalizadas de resposta permite que a porção de dependência temporal da relação entre duas variáveis seja representada pela convolução da variável independente com a função normalizada de resposta.

#### De emissões para concentração adicional

A relação entre as emissões e a concentração adicional na expressão (2) pode ser escrita como:

$$\Delta \rho_g(t) = \beta_g \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Phi_g(t-t') dt'$$

(15)

onde:

$$\Phi_g(t) = \sum_{r=1}^R f_{gr} \Phi_{gr}(t) = \sum_{r=1}^R f_{gr} e^{-t/\tau_{gr}}$$

(16)

$$\Phi_{gr}(t) = e^{-t/\tau_{gr}}$$

(17)

$\Phi_g(t)$  é a função normalizada de resposta da concentração adicional a um impulso de emissão e  $\Phi_{gr}(t)$  são seus componentes.



Conclui-se da expressão (15) que a concentração adicional resultante de um impulso de emissão no tempo  $t = 0$ , de valor  $\varepsilon_{g0}$ , é:

$$\Delta\rho_g(t) = \beta_g \varepsilon_{g0} \Phi_g(t) \quad (18)$$

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\Phi_g(0) = 1$ . A função normalizada de resposta da concentração adicional a um impulso de emissão  $\Phi_g(t)$  é definida positiva; começa em um, diminui monotonicamente e tende assintoticamente a zero no infinito.

A concentração adicional resultante de emissões constantes iniciando em  $t = 0$  e de valor  $\bar{\varepsilon}_g$  é:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_g(t) &= \beta_g \bar{\varepsilon}_g \int_0^t \Phi_g(t-t') dt' = \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Phi}_g(t) = \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{r=1}^R f_{gr} \bar{\Phi}_{gr}(t) \\ &= \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{r=1}^R f_{gr} \left[ 1 - (\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) e^{-t/\tau_{gr}} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\bar{\Phi}_{gr}(t) = 1 - (\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) e^{-t/\tau_{gr}} \quad (20)$$

onde  $\bar{\Phi}_g(t)$  é a função normalizada de resposta da concentração adicional a emissões constantes e  $\bar{\Phi}_{gr}(t)$  são seus componentes.

A constante na definição das funções de resposta é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_g(t) = 1$ . A função normalizada de resposta da concentração adicional a emissões constantes  $\bar{\Phi}_g(t)$  é definida positiva; começa em zero, aumenta monotonicamente e tende assintoticamente a 1 no infinito.

### De concentração adicional a aumento da temperatura

A relação entre a concentração adicional e o aumento da temperatura na expressão (13) pode ser escrita como:

$$\Delta T_g(t) = \frac{(1/C) \bar{\sigma}_g}{\bar{\tau}_c} \int_{-\infty}^t \Delta\rho_g(t') \Theta(t-t') dt' \quad (21)$$

onde:

$$\Theta(t) = \sum_{s=1}^S l_s \Theta_s(t) = \sum_{s=1}^S l_s (\bar{\tau}_c / \tau_{cs}) e^{-t/\tau_{cs}} \quad (22)$$

$$\Theta_s(t) = (\bar{\tau}_c / \tau_{cs}) e^{-t/\tau_{cs}} \quad (23)$$

$\Theta(t)$  é a função normalizada de resposta do aumento da temperatura a um impulso de concentração adicional e  $\Theta_s(t)$  são seus componentes.

Deduz-se da expressão (21) que o aumento da temperatura resultante de um impulso de concentração adicional no tempo  $t = 0$ , de valor  $\Delta\rho_{g0}$ , é:

$$\Delta T_g(t) = \frac{(1/C) \bar{\sigma}_g}{\bar{\tau}_c} \Delta\rho_{g0} \Theta(t) \quad (24)$$

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\Theta(0) = 1$ . A função normalizada de resposta do aumento da temperatura a um impulso de concentração adicional é definida positiva; começa em um, diminui monotonicamente e tende assintoticamente a zero no infinito.

O aumento da temperatura resultante da concentração adicional constante iniciando em  $t = 0$  e de valor  $\Delta\bar{\rho}_g$  é:

$$\begin{aligned} \Delta T_g(t) &= \frac{(1/C) \bar{\sigma}_g}{\bar{\tau}_c} \Delta\bar{\rho}_g \int_0^t \Theta(t-t') dt' = (1/C) \bar{\sigma}_g \Delta\bar{\rho}_g \bar{\Theta}(t) = (1/C) \bar{\sigma}_g \Delta\bar{\rho}_g \sum_{s=1}^S l_s \bar{\Theta}_s(t) \\ &= (1/C) \bar{\sigma}_g \Delta\bar{\rho}_g \sum_{s=1}^S l_s (1 - e^{-t/\tau_{cs}}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\bar{\Theta}_s(t) = 1 - e^{-t/\tau_{cs}} \quad (26)$$

onde  $\bar{\Theta}(t)$  é a função normalizada de resposta do aumento da temperatura à concentração adicional constante e  $\bar{\Theta}_s(t)$  são seus componentes.

A constante na definição das funções de resposta é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Theta}(t) = 1$ . A função normalizada de resposta do aumento da temperatura à concentração adicional constante  $\bar{\Theta}(t)$  é definida positiva; começa em zero, aumenta monotonicamente e tende assintoticamente a 1 no infinito.

### Sensibilidade climática

O valor assintótico do aumento da temperatura para uma concentração adicional constante de dióxido de carbono iniciando em  $t = 0$  e de valor igual à concentração inicial é chamado de sensibilidade climática. Também é descrito como o aumento da temperatura para uma duplicação da concentração de dióxido de carbono. Conclui-se de (25) que:

$$cs = (1/C) \bar{\sigma}_{CO_2} \rho_{CO_2i} \quad (27)$$

e, portanto,

$$(1/C) = \frac{cs}{\bar{\sigma}_{CO_2} \rho_{CO_2i}} \quad (28)$$

onde:

$\rho_{CO_2i}$  é a concentração inicial de dióxido de carbono que, na medida em que aumenta na mesma quantidade, resulta em um aumento de temperatura igual à sensibilidade climática.

### De emissões a aumento da temperatura

A relação entre as emissões e o aumento da temperatura na expressão (14) pode ser escrita como:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \bar{\sigma}_g \beta_g \bar{\tau}_g \int_{-\infty}^t \epsilon_g(t') \Psi_g(t-t') dt' \quad (29)$$

onde:

$$\Psi_g(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \Psi_{grs}(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}}) \quad (30)$$

$$\Psi_{grs}(t) = \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}})$$

(31)

$\Psi_g(t)$  é a função normalizada de resposta do aumento da temperatura a um impulso de emissão e  $\Psi_{grs}(t)$  são seus componentes.

Para  $\tau_{gr}$  igual a  $\tau_{cs}$ , a expressão (31) contém a divisão de zero por zero. O limite nesse caso é:

$$\lim_{\tau_{cs} \rightarrow \tau_{gr}} \Psi_{grs}(t) = \frac{t}{(\bar{\tau}_g \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{cs}} = \frac{t}{(\bar{\tau}_g \tau_{gr})} e^{-t/\tau_{gr}}$$

(32)

Conclui-se da expressão (29) que o aumento da temperatura resultante de um impulso de emissão no tempo  $t = 0$ , de valor  $\varepsilon_{g0}$ , é:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \bar{\sigma}_g \beta_g \bar{\tau}_g \varepsilon_{g0} \Psi_g(t)$$

(33)

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\int_0^{\infty} \Psi_g(t) dt = 1$ . A função normalizada de resposta do aumento da temperatura a um impulso de emissão  $\Psi_g(t)$  é definida positiva; começa em zero, atinge um máximo e então tende assintoticamente a zero no infinito.

O aumento da temperatura resultante de emissões constantes iniciando em  $t = 0$  e de valor  $\bar{\varepsilon}_g$  é:

$$\begin{aligned} \Delta T_g(t) &= (1/C) \bar{\sigma}_g \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \int_0^t \Psi_g(t-t') dt' = (1/C) \bar{\sigma}_g \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Psi}_g(t) \\ &= (1/C) \bar{\sigma}_g \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \bar{\Psi}_{grs}(t) \\ &= (1/C) \bar{\sigma}_g \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \left[ 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (\tau_{gr} e^{-t/\tau_{gr}} - \tau_{cs} e^{-t/\tau_{cs}}) \right] \end{aligned}$$

(34)

$$\bar{\Psi}_{grs}(t) = 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (\tau_{gr} e^{-t/\tau_{gr}} - \tau_{cs} e^{-t/\tau_{cs}})$$

(35)

onde  $\bar{\Psi}_g(t)$  é a função normalizada de resposta do aumento da temperatura a emissões constantes e  $\bar{\Psi}_{gr}(t)$  são seus componentes.

Para  $\tau_{gr}$  igual a  $\tau_{cs}$ , a expressão (35) contém a divisão de zero por zero. O limite nesse caso é:

$$\lim_{\tau_{cs} \rightarrow \tau_{gr}} \bar{\Psi}_{gr}(t) = 1 - \frac{t + \tau_{gr}}{\bar{\tau}_g} e^{-t/\tau_{gr}} = 1 - \frac{t + \tau_{cs}}{\bar{\tau}_g} e^{-t/\tau_{cs}}$$

(36)

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Psi}_g(t) = 1$ . A função normalizada de resposta do aumento da temperatura a emissões constantes  $\bar{\Psi}_g(t)$  é definida positiva; começa em zero, aumenta monotonicamente e tende assintoticamente a 1 no infinito.

#### A eficiência em termos de temperatura de um gás de efeito estufa

O fator constante nas expressões para o aumento da temperatura como função das emissões é definido como a eficiência térmica de um gás de efeito estufa, que pode ser escrita, com a ajuda da expressão (28), em termos da sensibilidade climática:

$$K_g = \frac{\bar{\sigma}_g \beta_g cs \bar{\tau}_g}{\bar{\sigma}_{CO_2} \rho_{CO_2i}}$$

(37)

Com essa definição, as expressões para a concentração adicional e o aumento da temperatura podem ser rescritas como:

$$\Delta T_g(t) = \frac{K_g}{\beta_g \bar{\tau}_g \bar{\tau}_c} \int_{-\infty}^t \Delta \rho_g(t') \Theta(t-t') dt'$$

(21')

$$\Delta T_g(t) = \frac{K_g}{\beta_g \bar{\tau}_g \bar{\tau}_c} \Delta \rho_{g0} \Theta(t)$$

(24')

$$\Delta T_g(t) = \frac{K_g}{\beta_g \bar{\tau}_g} \Delta \bar{\rho}_g \bar{\Theta}(t)$$

(25')

$$\Delta T_g(t) = K_g \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Psi_g(t-t') dt'$$

(29')

$$\Delta T_g(t) = K_g \varepsilon_{g0} \Psi_g(t)$$

(33')

$$\Delta T_g(t) = K_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Psi}_g(t)$$

(34')

### De emissões para taxa de variação da temperatura

A taxa de variação no tempo da temperatura é obtida tomando a derivada com relação ao tempo da expressão (30) e aplicando o resultado à expressão (29'):

$$\frac{\delta \Delta T_g(t)}{\delta t} = K_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ (1/\tau_{cs}) e^{-(t-t')/\tau_{cs}} - (1/\tau_{gr}) e^{-(t-t')/\tau_{gr}} \right] dt'$$

(38)

A relação entre as emissões e a taxa de variação no tempo do aumento da temperatura pode ser escrita como:

$$\frac{\delta \Delta T_g(t)}{\delta t} = \frac{K_g}{\bar{\tau}_g \bar{\tau}_c} \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Lambda_g(t-t') dt'$$

(39)

onde:

$$\Lambda_g(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \Lambda_{gr}(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{\tau_{gr} \bar{\tau}_c}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ (1/\tau_{cs}) e^{-t/\tau_{cs}} - (1/\tau_{gr}) e^{-t/\tau_{gr}} \right]$$

(40)

$$\Lambda_{gr}(t) = \frac{\tau_{gr} \bar{\tau}_c}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ (1/\tau_{cs}) e^{-t/\tau_{cs}} - (1/\tau_{gr}) e^{-t/\tau_{gr}} \right]$$

(41)

Para  $\tau_{gr}$  igual a  $\tau_{cs}$ , a expressão (41) contém a divisão de zero por zero. O limite nesse caso é:

$$\lim_{\tau_{cs} \rightarrow \tau_{gr}} \Lambda_{gr}(t) = (\bar{\tau}_c / \tau_{cs}) (1 - t/\tau_{cs}) e^{-t/\tau_{cs}} = (\bar{\tau}_c / \tau_{gr}) (1 - t/\tau_{gr}) e^{-t/\tau_{gr}}$$

(42)

$\Lambda_g(t)$  é a função normalizada de resposta da taxa de variação da temperatura a um impulso de emissão e  $\Lambda_{gr}(t)$  são seus componentes.

Deduz-se da expressão (39) que a taxa de variação da temperatura resultante de um impulso de emissão no tempo  $t = 0$ , de valor  $\varepsilon_{g0}$ , é:

$$\frac{\Delta T_g(t)}{\delta t} = \frac{K_g}{\bar{\tau}_c \bar{\tau}_g} \varepsilon_{g0} \Lambda_g(t) \quad (43)$$

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\Lambda_g(0) = 1$ . A função normalizada de resposta da taxa de variação da temperatura a um impulso de emissão  $\Lambda_g(t)$  começa com o valor um; é inicialmente positiva, depois negativa e tende assintoticamente a zero à medida que o tempo tende ao infinito.

A taxa de variação da temperatura resultante de emissões constantes iniciando em  $t = 0$ , e de valor  $\bar{\varepsilon}_g$ , é:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Delta T_g(t)}{\delta t} &= \frac{K_g}{\bar{\tau}_c \bar{\tau}_g} \bar{\varepsilon}_g \int_0^t \Lambda_g(t-t') dt' = K_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Lambda}_g(t) = K_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \bar{\Lambda}_{grs}(t) \\ &= K_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}}) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\bar{\Lambda}_{grs}(t) = \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}}) \quad (45)$$

onde  $\bar{\Lambda}_g(t)$  é a função normalizada de resposta da taxa de variação da temperatura a emissões constantes e  $\bar{\Lambda}_{grs}(t)$  são seus componentes.

Essa expressão é a mesma que a da função normalizada de resposta do aumento da temperatura a um impulso de emissão ( $\bar{\Lambda}_{grs}(t) = \Psi_{grs}(t)$ ), que deve ser esperado uma vez que  $\bar{\Lambda}_{grs}(t)$  resulta de tomar a integral no tempo e a derivada de  $\Psi_{grs}(t)$ .

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\int_0^\infty \bar{\Lambda}_g(t) dt = 1$ . A função normalizada de resposta da taxa de variação da temperatura a emissões constantes é definida positiva;

começa em zero, atinge um máximo e depois tende assintoticamente a zero no infinito.

### De emissões a aumento do nível médio do mar

O aumento do nível médio do mar pode ser aproximado por uma resposta exponencial múltipla a um aumento constante de temperatura iniciando em  $t = 0$ :

$$\Delta msl_g(t) = \Delta \bar{T}_g MSL \left( 1 - \sum_{m=1}^M h_m e^{-t/\tau_m} \right) \quad (46)$$

onde:

$\Delta msl_g(t)$  é o aumento médio do nível do mar resultante de um aumento constante de temperatura iniciando na temperatura no tempo  $t = 0$  ;

$\Delta \bar{T}_g$  é o valor do aumento constante de temperatura;

$MSL$  é o valor assintótico do aumento médio do nível do mar por unidade de aumento constante da temperatura;

$h_m$  é a m-ésima fração do aumento do nível médio do mar que se ajusta exponencialmente com a constante de tempo  $\tau_m$  ;

$\tau_m$  é a constante de tempo da exponencial de ajuste da fração  $h_m$ .

Conclui-se que a resposta do aumento do nível médio do mar a um impulso de aumento de temperatura de valor unitário é:

$$\Delta msl_g(t) = MSL \sum_{m=1}^M h_m (1/\tau_m) e^{-t/\tau_m} \quad (47)$$

A relação de dependência temporal entre o aumento da temperatura e o aumento do nível médio do mar é, então, dada por:

$$\Delta msl_g(t) = MSL \int_{-\infty}^t \Delta T(t') \sum_{m=1}^M h_m (1/\tau_m) e^{-(t-t')/\tau_m} dt' \quad (48)$$

A substituição da expressão para o aumento da temperatura de (29') resulta em:



$$\begin{aligned}\Delta msl_g(t) &= MSL \int_{-\infty}^t \left[ K_g \int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_g(t'') \Psi_g(t'-t'') dt'' \right] \sum_{m=1}^M h_m (1/\tau_m) e^{-(t-t')/\tau_m} dt' \\ &= MSL K_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{m=1}^M h_m \frac{(\tau_{gr} / (\bar{\tau}_g \tau_m))}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \int_{-\infty}^t \left[ \int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_g(t'') (e^{-(t'-t'')/\tau_{gr}} - e^{-(t'-t'')/\tau_{cs}}) dt'' \right] e^{-(t-t')/\tau_m} dt'\end{aligned}$$

(49)

A relação entre as emissões e o aumento do nível médio do mar na expressão (49) pode ser escrita como:

$$\Delta msl_g(t) = MSL K_g \int_{-\infty}^t \varepsilon(t') \Omega_g(t-t') dt' \quad (50)$$

onde:

$$\begin{aligned}\Omega_g(t) &= \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{m=1}^M h_m \Omega_{grsm}(t) = \\ &= \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{m=1}^M h_m \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_m)} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_m}) - \frac{\tau_{cs}}{(\tau_{cs} - \tau_m)} (e^{-t/\tau_{cs}} - e^{-t/\tau_m}) \right] \quad (51)\end{aligned}$$

$$\Omega_{grsm}(t) = \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_m)} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_m}) - \frac{\tau_{cs}}{(\tau_{cs} - \tau_m)} (e^{-t/\tau_{cs}} - e^{-t/\tau_m}) \right] \quad (52)$$

Para dois ou três valores iguais de  $\tau_{gr}$ ,  $\tau_{cs}$  e  $\tau_m$ , a expressão (52) contém a divisão de zero por zero. Os limites nesses casos são:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau_{gr} \rightarrow \tau_m} \Omega_{grsm}(t) &= \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ \frac{t}{\tau_{gr}} e^{-t/\tau_{gr}} - \frac{\tau_{cs}}{(\tau_{cs} - \tau_{gr})} (e^{-t/\tau_{cs}} - e^{-t/\tau_{gr}}) \right] = \\ &= \frac{(\tau_m / \bar{\tau}_g)}{(\tau_m - \tau_{cs})} \left[ \frac{t}{\tau_m} e^{-t/\tau_m} - \frac{\tau_{cs}}{(\tau_{cs} - \tau_m)} (e^{-t/\tau_{cs}} - e^{-t/\tau_m}) \right] \quad (53)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\tau_{cs} \rightarrow \tau_m} \Omega_{grsm}(t) &= \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}}) - \frac{t}{\tau_{cs}} e^{-t/\tau_{cs}} \right] = \\ &= \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_m)} \left[ \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_m)} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_m}) - \frac{t}{\tau_m} e^{-t/\tau_m} \right] \quad (54)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau_{gr} \rightarrow \tau_{cs} \\ \tau_{cs} \rightarrow \tau_m}} \Omega_{grsm}(t) &= \frac{(t/\bar{\tau}_g)}{(\tau_{cs} - \tau_m)} e^{-t/\tau_{cs}} - \frac{(\tau_{cs} \tau_m / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{cs} - \tau_m)^2} (e^{-t/\tau_{cs}} - e^{-t/\tau_m}) = \\ &= \frac{(t/\bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_m)} e^{-t/\tau_{gr}} - \frac{(\tau_{gr} \tau_m / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_m)^2} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_m}) \end{aligned}$$

(55)

$$\lim_{\substack{\tau_{gr} \rightarrow \tau_m \\ \tau_{cs} \rightarrow \tau_m}} \Omega_{grsm}(t) = (1/\bar{\tau}_g) (t^2 / 2\tau_{gr}^2) e^{-t/\tau_{gr}} = (1/\bar{\tau}_g) (t^2 / 2\tau_{cs}^2) e^{-t/\tau_{cs}} = (1/\bar{\tau}_g) (t^2 / 2\tau_m^2) e^{-t/\tau_m}$$

(56)

$\Omega_g(t)$  é a função normalizada de resposta do aumento do nível médio do mar a um impulso de emissão e  $\Omega_{grsm}(t)$  são seus componentes.

Deduz-se da expressão (50) que o aumento do nível médio do mar resultante de um impulso de emissão no tempo  $t = 0$ , de valor  $\varepsilon_{g0}$ , é:

$$\Delta msl_g(t) = MSL K_g \varepsilon_{g0} \Omega_g(t)$$

(57)

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\int_0^\infty \Omega_g(t) dt = 1$ . A função normalizada de resposta do aumento do nível médio do mar a um impulso de emissão  $\Omega_g(t)$  é definida positiva; começa com o valor zero, é inicialmente positiva, depois negativa e tende assintoticamente a zero enquanto o tempo tende ao infinito.

O aumento do nível médio do mar resultante das emissões constantes iniciando em  $t = 0$ , e de valor  $\bar{\varepsilon}_g$ , é:

$$\begin{aligned} \Delta msl_g(t) &= MSL K_g \bar{\varepsilon}_g \int_0^t \Omega_g(t-t') dt' = MSL K_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Omega}_g(t) = MSL K_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{m=1}^M h_m \bar{\Omega}_{grsm}(t) \\ &= MSL K_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{m=1}^M h_m \left[ 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_{gr}^2}{(\tau_{gr} - \tau_m)(\tau_{gr} - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{gr}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_{cs}^2}{(\tau_{cs} - \tau_m)(\tau_{gr} - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{cs}} - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_m^2}{(\tau_{gr} - \tau_m)(\tau_{cs} - \tau_m)} e^{-t/\tau_m} \right] \end{aligned}$$

(58)

$$\bar{\Omega}_{grsm}(t) = \left[ \begin{array}{l} 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_{gr}^2}{(\tau_{gr} - \tau_m)(\tau_{gr} - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{gr}} \\ + \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_{cs}^2}{(\tau_{cs} - \tau_m)(\tau_{gr} - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{cs}} - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_m^2}{(\tau_{gr} - \tau_m)(\tau_{cs} - \tau_m)} e^{-t/\tau_m} \end{array} \right] \quad (59)$$

onde  $\bar{\Omega}_g(t)$  é a função normalizada de resposta do aumento do nível médio do mar a emissões constantes e  $\bar{\Omega}_{grsm}(t)$  são seus componentes.

Para dois ou três valores iguais de  $\tau_{gr}$ ,  $\tau_{cs}$  e  $\tau_m$ , a expressão (59) contém a divisão de zero por zero. Os limites nesses casos são:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_{gr} \rightarrow \tau_m} \bar{\Omega}_{grsm}(t) &= 1 + \frac{(\tau_m / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{cs} - \tau_m)} \left[ \left( 2\tau_m + \frac{\tau_m^2}{(\tau_{cs} - \tau_m)} + t \right) e^{-t/\tau_m} - \frac{\tau_{cs}^2}{(\tau_{cs} - \tau_m)} e^{-t/\tau_{cs}} \right] = \\ &= 1 + \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{cs} - \tau_{gr})} \left[ \left( 2\tau_{gr} + \frac{\tau_{gr}^2}{(\tau_{cs} - \tau_{gr})} + t \right) e^{-t/\tau_{gr}} - \frac{\tau_{cs}^2}{(\tau_{cs} - \tau_{gr})} e^{-t/\tau_{cs}} \right] \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_{cs} \rightarrow \tau_m} \bar{\Omega}_{grsm}(t) &= 1 + \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_m)} \left[ \left( 2\tau_m + \frac{\tau_m^2}{(\tau_{gr} - \tau_m)} + t \right) e^{-t/\tau_m} - \frac{\tau_{gr}^2}{(\tau_{gr} - \tau_m)} e^{-t/\tau_{gr}} \right] = \\ &= 1 + \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ \left( 2\tau_{cs} + \frac{\tau_m^2}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} + t \right) e^{-t/\tau_{cs}} - \frac{\tau_{gr}^2}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{gr}} \right] \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_{gr} \rightarrow \tau_{cs}} \bar{\Omega}_{grsm}(t) &= 1 + \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_m - \tau_{gr})} \left[ \left( 2\tau_{gr} + \frac{\tau_{gr}^2}{(\tau_m - \tau_{gr})} + t \right) e^{-t/\tau_{gr}} - \frac{\tau_m^2}{(\tau_m - \tau_{gr})} e^{-t/\tau_m} \right] = \\ &= 1 + \frac{(\tau_{cs} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_m - \tau_{cs})} \left[ \left( 2\tau_{cs} + \frac{\tau_{cs}^2}{(\tau_m - \tau_{cs})} + t \right) e^{-t/\tau_{cs}} - \frac{\tau_m^2}{(\tau_m - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_m} \right] \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\tau_{gr} \rightarrow \tau_m \\ \tau_{cs} \rightarrow \tau_m}} \overline{\Omega}_{grsm}(t) &= 1 - (\tau_m / \bar{\tau}_g) \left( 1 + (t / \tau_m) + (t^2 / (2 \tau_m^2)) \right) e^{-t / \tau_m} = \\
&= 1 - (\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \left( 1 + (t / \tau_{gr}) + (t^2 / (2 \tau_{gr}^2)) \right) e^{-t / \tau_{gr}} = \\
&= 1 - (\tau_{cs} / \bar{\tau}_g) \left( 1 + (t / \tau_{cs}) + (t^2 / (2 \tau_{cs}^2)) \right) e^{-t / \tau_{cs}}
\end{aligned}$$

(63)

A constante na definição da função de resposta é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\Omega}_g(t) = 1$ . A função normalizada de resposta do aumento do nível médio do mar a emissões constantes é definida positiva; começa no zero, aumenta monotonicamente e tende assintoticamente a 1 no infinito.

#### 4. Potenciais de aquecimento global

Uma “emissão equivalente de dióxido de carbono” é definida por meio de um fator para cada gás de efeito estufa que não o dióxido de carbono, de tal forma que suas emissões possam ser somadas às de dióxido de carbono, após ponderadas por seus respectivos fatores.

O critério utilizado para escolher os fatores de ponderação é o de que o aumento da temperatura após um período de tempo específico é o mesmo que seria produzido se houvesse uma emissão de dióxido de carbono igual, em valor, à emissão equivalente de dióxido de carbono. Cada fator de ponderação é chamado de potencial de aquecimento global do gás de efeito estufa  $g$ . Portanto, em geral:

$$\mathcal{E}_{CO_2 equiv}(t) = \mathcal{E}_{CO_2}(t) + \sum_g \mathcal{E}_g(t) \Gamma_g$$

(64)

onde

$\sum_g$  indica a soma dos gases de efeito estufa, excluindo o dióxido de carbono, e

$\Gamma_g$  é o potencial de aquecimento global do gás de efeito estufa  $g$ , para um período de tempo específico.

A fim de encontrar a expressão e a dependência temporal do fator de ponderação, o aumento da temperatura devido às emissões de dióxido de carbono e de outros gases pode ser escrito a partir de (29), com a definição de (64), como:

$$\Delta T(t) = K_{CO_2} \int_{-\infty}^t \left[ \varepsilon_{CO_2}(t') + \sum_g \varepsilon_g(t') \Gamma_g(t-t') \right] \Psi_{CO_2}(t-t') dt' \quad (65)$$

onde

$$\Gamma_g(t) = \frac{K_g \Psi_g(t)}{K_{CO_2} \Psi_{CO_2}(t)} \quad (66)$$

é o potencial de aquecimento global do gás de efeito estufa  $g$  e período de tempo  $t$ .

O potencial de aquecimento global pode ser escrito como uma constante para cada gás de efeito estufa, multiplicado por um potencial normalizado de aquecimento global; após observar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_g(t)}{\Psi_{CO_2}(t)} = \frac{\bar{\tau}_{CO_2}}{\bar{\tau}_g} \text{ e exigindo que } \gamma_g(0) = 1:$$

$$\Gamma_g(t) = \frac{\bar{\sigma}_g \beta_g}{\bar{\sigma}_{CO_2} \beta_{CO_2}} \gamma_g(t) \quad (67)$$

$$\gamma_g(t) = \frac{\sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}})}{\sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} \frac{\tau_{CO_2r}}{(\tau_{CO_2r} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{CO_2r}} - e^{-t/\tau_{cs}})} \quad (68)$$

Para impulsos de emissão em  $t = 0$ , de valores  $\varepsilon_{CO_2,0}$  e  $\varepsilon_{g,0}$ , o resultante aumento da temperatura pode ser escrito, a partir de (33'), como:

$$\Delta T(t) = K_{CO_2} \left[ \varepsilon_{CO_2,0}(t) + \sum_g \varepsilon_{g,0}(t) \Gamma_g(t) \right] \Psi_{CO_2}(t) \quad (69)$$

Para emissões constantes iniciando em  $t = 0$ , de valores  $\bar{\varepsilon}_{CO_2}$  e  $\bar{\varepsilon}_g$ , o resultante aumento da temperatura pode ser escrito, a partir da expressão (34'), como:

$$\Delta T(t) = K_{CO_2} \left[ \bar{\varepsilon}_{CO_2} + \bar{\varepsilon}_g \bar{\Gamma}_g(t) \right] \bar{\Psi}_{CO_2}(t) \quad (70)$$

onde:

$$\bar{\Gamma}_g(t) = \frac{K_g \bar{\Psi}_g(t)}{K_{CO_2} \bar{\Psi}_{CO_2}(t)} \quad (71)$$

é definido como o potencial de aquecimento global comprometido do gás de efeito estufa g e período de tempo t.

O potencial de aquecimento global comprometido pode ser escrito como uma constante para cada gás de efeito estufa, multiplicado por um potencial de aquecimento global comprometido normalizado, depois de observar que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{\Psi}_g(t)}{\bar{\Psi}_{CO_2}(t)} = \frac{\bar{\tau}_{CO_2}}{\bar{\tau}_g}$  e exigindo

que  $\bar{\gamma}_g(0) = 1$ :

$$\bar{\Gamma}_g(t) = \frac{\bar{\sigma}_g \beta_g \bar{\tau}_g}{\bar{\sigma}_{CO_2} \beta_{CO_2} \bar{\tau}_{CO_2}} \bar{\gamma}_g(t) \quad (72)$$

$$\bar{\gamma}_g(t) = \frac{\sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \left[ 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (\tau_{gr} e^{-t/\tau_{gr}} - \tau_{cs} e^{-t/\tau_{cs}}) \right]}{\sum l_s \sum f_{CO_2,r} \left[ 1 - \frac{(\tau_{CO_2,r} / \bar{\tau}_{CO_2})}{(\tau_{CO_2,r} - \tau_{cs})} (\tau_{CO_2,r} e^{-t/\tau_{CO_2,r}} - \tau_{cs} e^{-t/\tau_{cs}}) \right]} \quad (73)$$

### O GWP do IPCC

O Painel Intergovernamental sobre Mudança do Clima – IPCC definiu o GWP(t) como a razão do forçamento radiativo acumulado no tempo t, resultante de um impulso unitário de concentração adicional do gás de efeito estufa g no tempo t = 0, e o forçamento radiativo acumulado no tempo t, resultante de um impulso unitário de concentração adicional de dióxido de carbono no tempo t = 0.

Há uma dificuldade fundamental em relação a essa definição, no que se refere ao forçamento radiativo acumulado ser uma variável que, uma vez atingido um certo valor, nunca retorna a zero, mesmo quando a concentração adicional retorna a zero caso as emissões sejam interrompidas.

A razão adotada pelo IPCC também corresponde à razão dos aumentos da temperatura, sob as mesmas condições, e com duas condições limitantes adicionais: primeiro, que todas as constantes  $\tau_{gr}$  do tempo do decaimento exponencial da concentração adicional sejam muito curtas em comparação a qualquer das constantes  $\tau_{cs}$  do tempo de ajuste do aumento da temperatura; e segundo, que o período de tempo  $t$  seja muito mais curto do que qualquer  $\tau_{cs}$ . Além disso, a definição do  $GWP_g(t)$  do IPCC refere-se a um aumento unitário da concentração adicional no tempo  $t = 0$ , enquanto a definição nesta nota refere-se a um impulso unitário de emissão, a diferença entre as duas sendo o fator  $\beta$ .

A definição do  $GWP_g(t)$  do IPCC, na notação utilizada nesta nota, é:

$$GWP_g(t) = \frac{\int_0^t \sigma_g \Delta \rho_g(t') dt'}{\int_0^t \sigma_{CO_2} \Delta \rho_{CO_2}(t') dt'} \quad (74)$$

Deve-se ressaltar que o IPCC usa o valor de coluna da constante  $\sigma$ , ao invés do valor médio  $\bar{\sigma}$  apresentado nesta nota. Na medida em que essas constantes aparecem apenas na forma da razão da constante para um gás de efeito estufa em relação a do dióxido de carbono, a diferença não é considerada no que se segue.

Tomando a expressão (2) para a concentração adicional quando  $\beta_g = 1$  e para um impulso de concentração de valor igual a um no tempo  $t = 0$ :

$$\Delta \rho_g(t) = \sum_{r=1}^R f_{gr} e^{-t/\tau_{gr}} \quad (75)$$

Substituindo esse valor na expressão (72):

$$\begin{aligned} GWP_g(t) &= \frac{\int_0^t \sigma_g \sum_{r=1}^R f_{gr} e^{-t'/\tau_{gr}} dt'}{\int_0^t \sigma_{CO_2} \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} e^{-t'/\tau_{CO_2r}} dt'} \\ &= \frac{\sigma_g \sum_{r=1}^R f_{gr} \tau_{gr} (1 - e^{-t/\tau_{gr}})}{\sigma_{CO_2} \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} \tau_{CO_2r} (1 - e^{-t/\tau_{CO_2r}})} \end{aligned} \quad (76)$$

A expressão para o potencial de aquecimento global conforme definido nesta nota é, a partir das expressões (67) e (68):

$$\Gamma_g(t) = \frac{\beta_g \sigma_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}})}{\beta_{CO_2} \sigma_{CO_2} \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} \frac{\tau_{CO_2r}}{(\tau_{CO_2r} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{CO_2r}} - e^{-t/\tau_{cs}})} \quad (77)$$

Considerando o caso em que  $t \ll \tau_{cs}$  e  $\tau_{gr} \ll \tau_{cs}$  para todos os valores de s e r, e tanto  $\beta_g$  como  $\beta_{CO_2}$  são iguais a um:

$$\Gamma_g(t) = \frac{\sigma_g \sum_{r=1}^R f_{gr} \tau_{gr} (1 - e^{-t/\tau_{gr}})}{\sigma_{CO_2} \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} \tau_{CO_2r} (1 - e^{-t/\tau_{CO_2r}})} \quad (78)$$

que é o mesmo que a expressão (75) para o GWP(t) do IPCC.

Conclui-se que o GWP(t) do IPCC é um caso especial do potencial de aquecimento global  $\Gamma_g(t)$  definido nesta nota, para o caso em que  $\beta_g$  e  $\beta_{CO_2}$  são tomados como sendo iguais a 1 e a constante do tempo de ajuste do aumento da temperatura tende ao infinito.

#### O “modelo para formuladores de políticas” da Proposta Brasileira

O governo do Brasil submeteu ao Secretariado da Convenção-Quadro das Nações Unidas sobre Mudança do Clima uma proposta de elementos de um protocolo a essa Convenção em 1997. Essa proposta continha a sugestão de um modelo para “formuladores de políticas” como uma forma simples de traduzir emissões para aumento da temperatura.

Na notação utilizada nesta nota, o modelo para “formuladores de políticas” é:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \sigma_g \beta_g \int_{-\infty}^t \left[ \int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_g(t'') e^{-(t'-t'')/\tau_g} dt'' \right] dt' \quad (79)$$

Pode-se observar que se trata da mesma expressão que a (14) desta nota, com duas aproximações.



O termo de ajuste do aumento da temperatura é omitido na proposta brasileira, que equivale a considerar o limite para o período de tempo de ajuste do aumento da temperatura tendendo ao infinito. Tal aproximação também é feita na definição do GWP( $t$ ) do IPCC.

O decaimento da concentração adicional é tomado seguindo uma lei exponencial simples, ou seja,  $R$  é tomado como sendo igual a um para todos os gases.

Embora o modelo para “formuladores de políticas” não tenha incluído o conceito de um potencial de aquecimento global, fica claro que ele implica tal conceito, que é semelhante ao do GWP do IPCC, com o acréscimo das constantes  $\beta$ .

## 5. Não-linearidades no forçamento radiativo

O forçamento radiativo médio  $\bar{\sigma}_g$ , na realidade, não é constante, mas uma função da concentração atmosférica para dióxido de carbono, metano e óxido nitroso.

Essa não-linearidade deve ser levada em conta ao tratar do problema da atribuição da mudança do clima a diferentes gases de efeito estufa ou fontes. Como essa não-linearidade afeta o forçamento da mudança do clima, ela é intrinsecamente diferente das não-linearidades internas na dinâmica do sistema climático. As últimas são levadas em conta implicitamente pelos modelos de circulação geral acoplados atmosfera-oceano, que são usados para derivação da sensibilidade climática.

Há dois aspectos relativos ao tratamento das não-linearidades no forçamento radiativo. Uma questão é a estimativa da resposta do forçamento radiativo às emissões globais. Uma outra questão é a resposta do sistema climático a pequenas variações nas emissões de fontes individuais, o enfoque relevante para a atribuição de causa às fontes individuais.

### A resposta não-linear do sistema climático às emissões

A expressão (7) é modificada para:

$$\Delta \bar{Q}_g(t) = \bar{\sigma}_g(\Delta \rho_g(t)) \Delta \rho_g(t) \quad (80)$$

A substituição em (10) resulta em uma expressão modificada (13), que pode ser escrita em termos da função de resposta do aumento da temperatura a um impulso de concentração adicional:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \int_{-\infty}^t \bar{\sigma}_g (\Delta \rho_g^G(t')) \Delta \rho_g^G(t') \left[ \sum_{s=1}^S l_s (1/\tau_{cs}) e^{-(t-t')/\tau_{cs}} \right] dt' \quad (81)$$

ou, usando a definição da função normalizada de resposta do aumento da temperatura a um impulso de concentração adicional de (22),

$$\Delta T_g(t) = \frac{CS}{\bar{\tau}_c \bar{\sigma}_{CO_2} \rho_{CO_2i}} \int_{-\infty}^t \bar{\sigma}_g (\Delta \rho_g^G(t')) \Delta \rho_g^G(t') \Theta(t-t') dt' \quad (82)$$

onde o G expoente refere-se a concentrações globais adicionais.

A combinação com a expressão (2) fornece a expressão para a relação entre as emissões globais do gás de efeito estufa  $g$  e o resultante aumento da temperatura, escrita com o uso da função de resposta do aumento da temperatura a um impulso de concentração adicional e a função de resposta da concentração adicional a um impulso de emissão:

$$\Delta T_g(t) = (1/C) \beta_g \int_{-\infty}^t \bar{\sigma}_g \left( \int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_g^G(t'') \Phi_g(t''-t') \right) \left\{ \int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_g(t'') \Phi_g(t''-t') dt'' \right\} \Theta(t-t') dt' \quad (82)$$

Essa fórmula só pode ser usada com integração numérica, porque as dependências não-lineares do forçamento radiativo em relação à concentração atmosférica de dióxido de carbono, metano e óxido nitroso são tais que não se pode encontrar uma solução analítica.

No caso especial de emissões constantes, a expressão () é simplificada e o limite assintótico do aumento da temperatura à medida que o tempo tende ao infinito pode ser escrito como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \bar{T}_g^G(t) = \frac{\bar{\sigma}_g (\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \bar{\rho}_g^G(t)) c.s.}{\bar{\sigma}_{CO_2} (\rho_{CO_2i})} = \frac{\bar{\sigma}_g (\beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g^G) c.s.}{\bar{\sigma}_{CO_2} (\rho_{CO_2i})} \quad (83)$$

### Atribuição não-linear da mudança do clima a concentrações adicionais prescritas

Ao usar as funções de resposta para estimar o efeito relativo das emissões de diferentes fontes, as concentrações atmosféricas prescritas podem ser usadas para determinar o forçamento radiativo médio adequado. Uma expressão analítica para as funções de resposta pode ser encontrada se a dependência

temporal do forçamento radiativo médio é expresso como uma série de potências, truncada para oferecer a precisão desejada.

Para determinados dados de concentração atmosférica para um certo período de tempo  $\rho_g(t)$ , o forçamento radiativo médio pode ser escrito como:

$$\bar{\sigma}_g(t) = \bar{\sigma}_g(\rho_g(t)) = \bar{\sigma}_{g0} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{N_g} \alpha_{gn} (t - t_0)^n \right] \quad (84)$$

onde:

$\bar{\sigma}_{g0}$  é o forçamento radiativo médio no tempo  $t_0$ ;

$N_g$  é a ordem da expansão;

$\alpha_{gn}$  são coeficientes determinados a partir dos dados por uma técnica de mínimos quadrados;

A substituição da expressão (84) na expressão completa (14) para o aumento da temperatura permite a determinação da função normalizada de resposta do aumento da temperatura levando em conta as não-linearidades:

$$\Psi_{grs}(t) = \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left\{ \begin{array}{l} e^{-t/\tau_{gr}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{N_g} \alpha_{gn} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(t-t_0)^{n-k}}{((\tau_{gr} - \tau_{cs})/(\tau_{gr}\tau_{cs}))^k} \right] - \\ - e^{-t/\tau_{cs}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{N_g} \alpha_{gn} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(-t_0)^{n-k}}{((\tau_{gr} - \tau_{cs})/(\tau_{gr}\tau_{cs}))^k} \right] \end{array} \right\} \quad (85)$$

Essa expressão só é válida dentro do período de tempo para o qual os coeficientes  $\alpha_{gn}$  foram obtidos.

## 6. O efeito das emissões ao longo de períodos específicos de tempo

A separação dos efeitos das emissões que ocorrem ao longo de diferentes períodos de tempo pode ser obtida separando as integrais de tempo em uma soma de integrais durante cada intervalo de tempo anterior ao tempo de interesse.

Para garantir simplicidade na notação, as variáveis e funções desta seção são escritas em termos dos seus componentes s e r. As expressões completas são obtidas, então, somando os componentes após ponderados com os fatores  $l_s$  e  $f_{gr}$ , conforme o caso.

Deve-se tomar cuidado, contudo, que a soma dos componentes só pode ser feita para a expressão completa. Há produtos nas expressões e as operações de adição e multiplicação não podem ser intercambiadas.

A seguinte notação é apresentada para os componentes de concentração adicional e aumento da temperatura, respectivamente, no final do período de tempo  $(t_a, t_b)$ , resultantes das emissões durante esse período de tempo.

$$\Delta\rho_{gr}(t_a, t_b) = \beta_g \int_{t_a}^{t_b} \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t_b - t') dt' \quad (86)$$

e

$$\Delta T_{grs}(t_a, t_b) = K_g \int_{t_a}^{t_b} \varepsilon_g(t') \Psi_{grs}(t_b - t') dt' \quad (87)$$

### As emissões ao longo de vários períodos

O tempo antes de  $t$  é dividido em intervalos  $n+1$   $(-\infty, t_0), (t_0, t_1), \dots, (t_{n-1}, t_n), (t_n, t)$ . A relação entre as emissões e os componentes da concentração adicional pode, então, ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{gr}(t) &= \Delta\rho_{gr}(-\infty, t) = \beta_g \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t - t') dt' = \\ &= \beta_g \int_{-\infty}^{t_0} \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t - t') dt' + \beta_g \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t - t') dt' + \dots + \\ &+ \beta_g \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t - t') dt' + \beta_g \int_{t_n}^t \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t - t') dt' \\ &= \beta_g \sum_{i=0}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t - t') dt' + \beta_g \int_{t_n}^t \varepsilon_g(t') \Phi_{gr}(t - t') dt' \end{aligned} \quad (88)$$

onde entende-se que  $t_{-1}$  representa  $t$  tendendo a menos infinito.

Essa expressão contém integrais do seguinte tipo, que podem ser rescritas conforme apresentado:

$$\int_{t_a}^{t_b} \varepsilon(t') e^{-(t-t')/\tau} dt' = e^{-t/\tau} \int_{t_a}^{t_b} \varepsilon(t') e^{t'/\tau} dt' = e^{-(t-t_b)/\tau} \int_{t_a}^{t_b} \varepsilon(t') e^{-(t_b-t')/\tau} dt' \quad (89)$$

O uso dessa igualdade permite que o componente da concentração adicional seja escrito como:

$$\Delta\rho_{gr}(t) = \beta_g \sum_{i=0}^n e^{-(t-t_i)/\tau_{gr}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{gr}} dt' + \beta_g \int_{t_n}^t \varepsilon_g(t') e^{-(t-t')/\tau_{gr}} dt' \quad (90)$$

O uso da definição da função normalizada de resposta da expressão (17) permite que o componente da concentração adicional seja escrito nas duas formas equivalentes seguintes:

$$\Delta\rho_{gr}(t) = \sum_{i=0}^n \Delta\rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Phi_{gr}(t-t_i) + \Delta\rho_{gr}(t_n, t) \quad (91)$$

$$\Delta\rho_{gr}(t) = \left[ \sum_{i=0}^n \Delta\rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Phi_{gr}(t_n-t_i) \right] \Phi_{gr}(t-t_n) + \Delta\rho_{gr}(t_n, t) \quad (92)$$

É possível escrever a expressão completa para a concentração adicional, definindo fatores de ponderação modificados  $f'_{gr}$ , como abaixo:

$$\Delta\rho_g(t) = \Delta\rho_g(t_n) \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Phi_{gr}(t-t_n) + \Delta\rho_g(t_n, t) \quad (93)$$

onde:

$$f'_{gr} = f_{gr} \frac{\sum_{i=0}^n \Delta\rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Phi_{gr}(t_n-t_i)}{\Delta\rho_g(t_n)} \quad (94)$$

Um desenvolvimento semelhante pode ser feito começando com a expressão (81) para o componente do aumento da temperatura como uma função das emissões:

$$\begin{aligned}
\Delta T_{grs}(t) &= \Delta T_{grs}(-\infty, t) = K_g \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Psi_{grs}(t-t') dt' \\
&= K_g \sum_{i=0}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') \Psi_{grs}(t-t') dt' + K_g \int_{t_n}^t \varepsilon_g(t') \Psi_{grs}(t-t') dt'
\end{aligned}
\tag{95}$$

$$\Delta T_{grs}(t) = \frac{K_g (\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left\{ \sum_{i=0}^n \left[ e^{-(t-t_i)/\tau_{gr}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{gr}} dt' - e^{-(t-t_i)/\tau_{cs}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{cs}} dt' \right] + \right. \\
\left. + \int_{t_n}^t \varepsilon_g(t') \left( e^{-(t-t')/\tau_{gr}} - e^{-(t-t')/\tau_{cs}} \right) dt' \right\}$$

(96)

A expressão acima pode ser reescrita subtraindo e adicionando à primeira linha a integral da esquerda multiplicada pelo fator exponencial com a constante  $\tau_{cs}$  e reagrupando:

$$\begin{aligned}
\Delta T_{grs}(t) &= \frac{K_g (\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left\{ \sum_{i=0}^n \left[ e^{-(t-t_i)/\tau_{gr}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{gr}} dt' - e^{-(t-t_i)/\tau_{cs}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{gr}} dt' - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{-(t-t_i)/\tau_{cs}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{cs}} dt' + e^{-(t-t_i)/\tau_{cs}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{gr}} dt' \right] + \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_n}^t \varepsilon_g(t') \left( e^{-(t-t')/\tau_{gr}} - e^{-(t-t')/\tau_{cs}} \right) dt' \right\} \\
&= \frac{K_g (\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left\{ \sum_{i=0}^n \left[ \left( e^{-(t-t_i)/\tau_{gr}} - e^{-(t-t_i)/\tau_{cs}} \right) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') e^{-(t_i-t')/\tau_{gr}} dt' + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-(t-t_i)/\tau_{cs}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon_g(t') \left( e^{-(t_i-t')/\tau_{gr}} - e^{-(t_i-t')/\tau_{cs}} \right) dt' \right] + \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_n}^t \varepsilon_g(t') \left( e^{-(t-t')/\tau_{gr}} - e^{-(t-t')/\tau_{cs}} \right) dt' \right\}
\end{aligned}$$

(97)

O uso da definição das funções normalizadas de resposta permite que o componente de aumento da temperatura seja escrito nas duas formas equivalentes seguintes:

$$\begin{aligned}
\Delta T_{grs}(t) &= (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \sum_{i=0}^n \Delta T_{grs}(t_{i-1}, t_i) \Theta_s(t-t_i) + \\
&\quad + \frac{K_g}{\beta_g} \sum_{i=0}^n \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Psi_{grs}(t-t_i) + \\
&\quad + \Delta T_{grs}(t_n, t)
\end{aligned}$$

(98)

(99)

É possível escrever a expressão completa para o aumento da temperatura, usando os fatores de ponderação modificados  $f'_{gr}$  e definindo um fator de ponderação modificado  $l'_s$ , como abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta T_g(t) = & \Delta T_g(t_n) \sum_{s=1}^S l'_s \Theta_s(t-t_n) + \\ & + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta \rho_g(t_n) \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Psi_{grs}(t-t_n) + \\ & + \Delta T_g(t_n, t) \end{aligned} \quad (100)$$

onde:

$$l'_s = l_s \frac{(\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{i=0}^n \left[ (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \Delta T_{grs}(t_{i-1}, t_i) \Theta_s(t_n - t_i) + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Psi_{grs}(t_n - t_i) \right]}{\Delta T_g(t_n)} \quad (101)$$

#### As emissões ao longo de um período e posteriormente

Para as emissões que ocorrem durante o período  $(t_a, t_b)$  e posteriormente, o componente da concentração adicional, de (92), é simplificado para:

$$\Delta \rho_{gr}(t) = \Delta \rho_{gr}(t_a, t_b) \Phi_{gr}(t-t_b) + \Delta \rho_{gr}(t_b, t) \quad (102)$$

A comparação das expressões (18) e (102) mostra que a concentração adicional depois do período de emissões é igual à resultante de um impulso de emissão de valor  $\Delta \rho_g(t_a, t_b) / \beta_g$  no tempo  $t = t_b$ , que então decai com o tempo de acordo com a função normalizada de resposta da concentração adicional a um impulso de emissão  $\Phi_{gr}(t)$ .

No caso geral de emissões ocorrendo em diferentes períodos de tempo, a análise das expressões (85) e (86) mostra que a situação é semelhante. A concentração adicional no final de cada período,  $t_i$ , é igual à resultante de um impulso de emissão de valor  $\Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) / \beta_g$  no tempo  $t = t_i$ , que então decai de acordo com a função normalizada de resposta da concentração adicional a um impulso de emissão  $\Phi_{gr}(t)$ .

As expressões completas para a concentração adicional e os fatores de ponderação modificados  $f'_{gr}$ , de (93) e (94), ficam:

$$\Delta\rho_g(t) = \Delta\rho_g(t_b) \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Phi_{gr}(t-t_b) + \Delta\rho_g(t_b, t)$$

(103)

onde:

$$f'_{gr} = f_{gr} \frac{\Delta\rho_{gr}(t_a, t_b)}{\Delta\rho_g(t_b)}$$

(104)

De forma semelhante, para as emissões que ocorrem durante o período  $(t_a, t_b)$  e posteriormente, o componente do aumento da temperatura, de (93), é simplificado para:

$$\Delta T_{grs}(t) = (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \Delta T_{grs}(t_a, t_b) \Theta_s(t-t_b) + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta\rho_{grs}(t_a, t_b) \Psi_{grs}(t-t_b) + \Delta T_g(t_b, t)$$

(105)

A comparação das expressões (24) e (33) com o primeiro e segundo termos de (105), respectivamente, mostra que o aumento da temperatura após o período de emissões é, em parte, igual ao resultante do aumento da temperatura no final do período de emissões,  $t_b$ , depois de decair de acordo com a função de reposta do aumento da temperatura a um impulso de concentração adicional,  $\Theta_s(t)$ ; e, em parte, igual ao resultante de um impulso de emissão de valor  $\Delta\rho_{gr}(t_a, t_b) / \beta_g$  no tempo  $t = t_b$ .

As expressões completas para o aumento da temperatura e os fatores de ponderação modificados  $l'_s$ , de (100) e (101) ficam:

$$\begin{aligned} \Delta T_g(t) = & \Delta T_g(t_b) \sum_{s=1}^S l'_s \Theta_s(t-t_b) + \\ & + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta\rho_g(t_b) \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Psi_{grs}(t-t_b) + \\ & + \Delta T_g(t_b, t) \end{aligned}$$

(106)

onde:



$$l'_s = l_s \frac{(\bar{\tau}_{cs} / \bar{\tau}_c) \sum_{r=1}^R f_{gr} \Delta T_{grs}(t_a, t_b)}{\Delta T_g(t_b)}$$

(107)

## 7. Resumo das fórmulas

$$(1/C) = \frac{cs}{\bar{\sigma}_{CO_2} \rho_{CO_2i}}$$

(28)

$$K_g = \frac{\bar{\sigma}_g \beta_g cs \bar{\tau}_g}{\bar{\sigma}_{CO_2} \rho_{CO_2i}}$$

(36)

### Funções de resposta aos impulsos

Função de resposta da concentração adicional a um impulso de emissão

$$\Delta \rho_g(t) = \beta_g \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Phi_g(t-t') dt'$$

(15)

$$\Phi_g(t) = \sum_{r=1}^R f_{gr} e^{-t/\tau_{gr}}$$

(16)

Função de resposta do aumento da temperatura a um impulso de concentração adicional

$$\Delta T_g(t) = (cs / \rho_{CO_2i}) (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) (1 / \bar{\tau}_c) \int_{-\infty}^t \Delta \rho_g(t') \Theta(t-t') dt'$$

(21)

$$\Theta(t) = \sum_{s=1}^S l_s (\bar{\tau}_c / \tau_{cs}) e^{-t/\tau_{cs}}$$

(22)

Função de resposta do aumento da temperatura a um impulso de emissão

$$\Delta T_g(t) = (cs / \rho_{CO_2i}) (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) \beta_g \bar{\tau}_g \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Psi_g(t-t') dt'$$

(29)

$$\Psi_g(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}})$$

(31)

Função de resposta da taxa de variação da temperatura a um impulso de emissão

$$\frac{\delta \Delta T_g(t)}{\delta t} = (cs / \rho_{CO_2i}) (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) \beta_g (1 / \bar{\tau}_c) \int_{-\infty}^t \varepsilon_g(t') \Lambda_g(t-t') dt'$$

(39)

$$\Lambda_g(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{\tau_{gr} \bar{\tau}_c}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ (1 / \tau_{cs}) e^{-t / \tau_{cs}} - (1 / \tau_{gr}) e^{-t / \tau_{gr}} \right]$$

(40)

Função de resposta do aumento do nível médio do mar a um impulso de emissão

$$\Delta msl_g(t) = MSL K_g \int_{-\infty}^t \varepsilon(t') \Omega_g(t-t') dt'$$

(50)

$$\Omega_g(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{m=1}^M h_m \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} \left[ \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_m)} (e^{-t / \tau_{gr}} - e^{-t / \tau_m}) - \frac{\tau_{cs}}{(\tau_{cs} - \tau_m)} (e^{-t / \tau_{cs}} - e^{-t / \tau_m}) \right]$$

(51)

### Funções de resposta a valores constantes

Função de resposta da concentração adicional a emissões constantes

$$\Delta \rho_g(t) = \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Phi}_g(t)$$

(19)

$$\bar{\Phi}_g(t) = \sum_{r=1}^R f_{gr} (\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) (1 - e^{-t / \tau_{gr}})$$

(20)

Função de resposta do aumento da temperatura à concentração adicional constante

$$\Delta T_g(t) = (cs / \rho_{CO_2i}) (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) \Delta \bar{\rho}_g \bar{\Theta}(t)$$

(25)

$$\bar{\Theta}(t) = \sum_{s=1}^S l_s (1 - e^{-t / \tau_{cs}})$$

(26)

Função de resposta do aumento da temperatura a emissões constantes

$$\Delta T_g(t) = (cs / \rho_{CO_2i}) (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Psi}_g(t)$$

(34)

$$\bar{\Psi}_g(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \left[ 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (\tau_{gr} e^{-t / \tau_{gr}} - \tau_{cs} e^{-t / \tau_{cs}}) \right]$$

(35)

Função de resposta da taxa de variação da temperatura a emissões constantes

$$\frac{\delta \Delta T_g(t)}{\delta t} = (cs / \rho_{CO_2i}) (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) \beta_g \bar{\tau}_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Lambda}_g(t)$$

(44)

$$\bar{\Lambda}_g(t) = \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}})$$

(45)

Função de resposta do aumento do nível médio do mar a emissões constantes

$$\Delta msl_g(t) = MSL K_g \bar{\varepsilon}_g \bar{\Omega}_g(t)$$

(58)

$$\Delta msl_g(t) = MSL K_g \bar{\varepsilon}_g \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum h_m \left[ 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_{gr}^2}{(\tau_{gr} - \tau_m) (\tau_{gr} - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{gr}} + \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_{cs}^2}{(\tau_{cs} - \tau_m) (\tau_{gr} - \tau_{cs})} e^{-t/\tau_{cs}} - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g) \tau_m^2}{(\tau_{gr} - \tau_m) (\tau_{cs} - \tau_m)} e^{-t/\tau_m} \right]$$

(59)

Potenciais de aquecimento global

Potencial de aquecimento global

$$\Delta T(t) = K_{CO_2} \int_{-\infty}^t \left[ \varepsilon_{CO_2}(t') + \sum_g \varepsilon_g(t') \Gamma_g(t-t') \right] \Psi_{CO_2}(t-t') dt'$$

(65)

$$\Gamma_g(t) = (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) (\beta_g / \beta_{CO_2}) \gamma_g(t)$$

(67)

$$\gamma_g(t) = \frac{\sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \frac{\tau_{gr}}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{gr}} - e^{-t/\tau_{cs}})}{\sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} \frac{\tau_{CO_2r}}{(\tau_{CO_2r} - \tau_{cs})} (e^{-t/\tau_{CO_2r}} - e^{-t/\tau_{cs}})}$$

(68)

Potencial de aquecimento global comprometido

$$\Delta T(t) = K_{CO_2} \left[ \bar{\varepsilon}_{CO_2} + \bar{\varepsilon}_g \bar{\Gamma}_g(t) \right] \bar{\Psi}_{CO_2}(t)$$

(70)

$$\bar{\Gamma}_g(t) = (\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2}) (\beta_g / \beta_{CO_2}) (\bar{\tau}_g / \bar{\tau}_{CO_2}) \bar{\gamma}_g(t)$$

(72)

$$\bar{\gamma}_g(t) = \frac{\sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f_{gr} \left[ 1 - \frac{(\tau_{gr} / \bar{\tau}_g)}{(\tau_{gr} - \tau_{cs})} (\tau_{gr} e^{-t/\tau_{gr}} - \tau_{cs} e^{-t/\tau_{cs}}) \right]}{\sum l_s \sum f_{CO_2r} \left[ 1 - \frac{(\tau_{CO_2r} / \bar{\tau}_{CO_2})}{(\tau_{CO_2r} - \tau_{cs})} (\tau_{CO_2r} e^{-t/\tau_{CO_2r}} - \tau_{cs} e^{-t/\tau_{cs}}) \right]}$$

(73)

GWP do IPCC

$$GWP_g(t) = \frac{\sigma_g \sum_{r=1}^R f_{gr} \tau_{gr} (1 - e^{-t/\tau_{gr}})}{\sigma_{CO_2} \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} \tau_{CO_2r} (1 - e^{-t/\tau_{CO_2r}})}$$

(76)

GWP do modelo para “formuladores de políticas”

$$GWP_g(t) = \frac{\sigma_g \beta_g \sum_{r=1}^R f_{gr} \tau_{gr} (1 - e^{-t/\tau_{gr}})}{\sigma_{CO_2} \beta_{CO_2} \sum_{r=1}^R f_{CO_2r} \tau_{CO_2r} (1 - e^{-t/\tau_{CO_2r}})}$$

Resposta às emissões em vários períodos

Respostas da concentração adicional às emissões em vários períodos

$$\Delta \rho_{gr}(t) = \sum_{i=0}^n \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Phi_{gr}(t - t_i) + \Delta \rho_{gr}(t_n, t)$$

(85)

$$\Delta \rho_{gr}(t) = \left[ \sum_{i=0}^n \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Phi_{gr}(t_n - t_i) \right] \Phi_{gr}(t - t_n) + \Delta \rho_{gr}(t_n, t)$$

(86)

$$\Delta \rho_g(t) = \Delta \rho_g(t_n) \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Phi_{gr}(t - t_n) + \Delta \rho_g(t_n, t)$$

(87)

$$f'_{gr} = f_{gr} \frac{\sum_{i=0}^n \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Phi_{gr}(t_n - t_i)}{\Delta \rho_g(t_n)}$$

(88)

Resposta do aumento da temperatura às emissões em vários períodos

$$\begin{aligned}\Delta T_{grs}(t) &= (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \sum_{i=0}^n \Delta T_{grs}(t_{i-1}, t_i) \Theta_s(t-t_i) + \\ &+ \frac{K_g}{\beta_g} \sum_{i=0}^n \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Psi_{grs}(t-t_i) + \\ &+ \Delta T_{grs}(t_n, t)\end{aligned}$$

(92)

$$\begin{aligned}\Delta T_{grs}(t) &= (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \left[ \sum_{i=0}^n \left( (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \Delta T_{grs}(t_{i-1}, t_i) \Theta_s(t_n - t_i) + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Psi_{grs}(t_n - t_i) \right) \right] \Theta_s(t - t_n) + \\ &+ \frac{K_g}{\beta_g} \left[ \sum_{i=0}^n \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Phi_{gr}(t_n - t_i) \right] \Psi_{grs}(t - t_n) + \\ &+ \Delta T_{grs}(t_n, t)\end{aligned}$$

(93)

$$\begin{aligned}\Delta T_g(t) &= \Delta T_g(t_n) \sum_{s=1}^S l'_s \Theta_s(t-t_n) + \\ &+ \frac{K_g}{\beta_g} \Delta \rho_g(t_n) \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Psi_{grs}(t-t_n) + \\ &+ \Delta T_g(t_n, t)\end{aligned}$$

(94)

$$l'_s = l_s \frac{(\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \sum_{r=1}^R f_{gr} \sum_{i=0}^n \left[ (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \Delta T_{grs}(t_{i-1}, t_i) \Theta_s(t_n - t_i) + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta \rho_{gr}(t_{i-1}, t_i) \Psi_{grs}(t_n - t_i) \right]}{\Delta T_g(t_n)}$$

(95)

Resposta da concentração adicional às emissões ao longo de um período e posteriormente

$$\Delta \rho_{gr}(t) = \Delta \rho_{gr}(t_a, t_b) \Phi_{gr}(t-t_b) + \Delta \rho_{gr}(t_b, t)$$

(96)

$$\Delta \rho_g(t) = \Delta \rho_g(t_b) \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Phi_{gr}(t-t_b) + \Delta \rho_g(t_b, t)$$

(97)

$$f'_{gr} = f_{gr} \frac{\Delta \rho_{gr}(t_a, t_b)}{\Delta \rho_g(t_b)}$$

(98)

Resposta do aumento da temperatura às emissões ao longo de um período e posteriormente

$$\Delta T_{grs}(t) = (\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \Delta T_{grs}(t_a, t_b) \Theta_s(t - t_b) + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta \rho_{grs}(t_a, t_b) \Psi_{grs}(t - t_b) + \Delta T_g(t_b, t)$$

(99)

$$\begin{aligned} \Delta T_g(t) = & \Delta T_g(t_b) \sum_{s=1}^S l'_s \Theta_s(t - t_b) + \\ & + \frac{K_g}{\beta_g} \Delta \rho_g(t_b) \sum_{s=1}^S l_s \sum_{r=1}^R f'_{gr} \Psi_{grs}(t - t_b) + \\ & + \Delta T_g(t_b, t) \end{aligned}$$

(100)

$$l'_s = l_s \frac{(\tau_{cs} / \bar{\tau}_c) \sum_{r=1}^R f_{gr} \Delta T_{grs}(t_a, t_b)}{\Delta T_g(t_b)}$$

(101)

## 8. Exemplo da aplicação aos dados

A dimensionalidade das constantes e funções nesta nota são as seguintes:

$$[\Delta \rho] = [g]$$

$$[\beta] = 1$$

$$[\mathcal{E}] = [\bar{\mathcal{E}}] = [g][s]^{-1}$$

$$[\mathcal{E}_0] = [g]$$

$$[cs] = [K]$$

$$[\Delta T] = [K]$$

$$[\delta \Delta T / \delta t] = [K][s]^{-1}$$

$$[msl] = [cm]$$

$$[MSL] = [cm][K]^{-1}$$

$$[\Delta \rho] = [\Delta \bar{\rho}] = [g]$$

$$[\Delta \rho_0] = [g][s]$$

$$[\tau] = [t] = [s]$$

$$[K] = [K][s][g]^{-1}$$

$$[\Phi] = [\bar{\Phi}] = [\Theta] = [\bar{\Theta}] = [\Lambda] = [\bar{\Psi}] = [\bar{\Omega}] = 1$$

$$[\Psi] = [\Omega] = [\bar{\Lambda}] = [s]^{-1}$$

$$[\Gamma] = [\gamma] = 1$$

O modelo adotado para a resposta da temperatura a uma duplicação da concentração de dióxido de carbono é:

$$\Delta T = 3,06 \left[ 1 - 0,634 e^{-t/20} - 0,366 e^{-t/990} \right]$$

para uma concentração inicial de dióxido de carbono:

$$\rho_{CO_2i} = 354,17 \text{ ppmv}$$

A resposta ao impulso da concentração adicional de dióxido de carbono é tirada do modelo de Berna (Joos):

$$\Delta \rho_{CO_2}(t) = 0,131 + 0,216 e^{-t/330} + 0,261 e^{-t/80} + 0,294 e^{-t/20} + 0,098 e^{-t/1.6}$$

Adota-se, arbitrariamente, que a fração residual cai com uma constante exponencial de tempo de 300.000 anos, que é mais longa que a constante mais lenta do tempo do decaimento do gás de efeito estufa, 50.000 anos para o perfluormetano.

As constantes exponenciais pontuais do tempo do decaimento para todos os outros gases de efeito estufa são tiradas do Segundo Relatório de Avaliação do IPCC.

Os valores de  $(\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2})$  são tirados do Segundo Relatório de Avaliação do IPCC de 1995, em unidades de  $W/m^2$  por ppmv, adotando que:

$$\bar{\sigma}_g / \bar{\sigma}_{CO_2} = \sigma_g / \sigma_{CO_2}$$

ou seja, os valores, relativos ao dióxido de carbono, das constantes sigma são os mesmos para os valores médios e de coluna.

A equivalência entre as unidades de massa e a fração de volume é adotada como sendo 0,4636 ppmv/GtC para o dióxido de carbono; para os outros gases, esse valor é ajustado pela massa molecular adequada.

As unidades físicas das variáveis são as seguintes:

- tempo em anos (a);
- emissões em gigatonelada ou petagrama de carbono por ano (GtC/a ou PgC/a) para o dióxido de carbono; em teragrama de nitrogênio (TgN/a) para o óxido nitroso; e em teragrama do gás (Tg<sub>g</sub>/a) para todos os outros gases de efeito estufa;
- impulso de emissão em GtC para o dióxido de carbono; em TgN para o óxido nitroso; e em Tg<sub>g</sub> para todos os outros gases de efeito estufa;
- concentração atmosférica em partes por milhão em volume para o dióxido de carbono; e em partes por bilhão em volume para todos os outros gases de efeito estufa;
- impulso de concentração atmosférica em ppmv.a para o dióxido de carbono; e em ppbv.a para todos os outros gases de efeito estufa;
- temperatura em graus Celsius (°C);
- taxa de variação da temperatura em graus Celsius por ano (°C/a);
- aumento do nível médio do mar em centímetros (cm).

Os valores das constantes nas fórmulas que definem a função de resposta, bem como as constantes de conversão de unidade aparecem na Tabela I, para os 24 gases de efeito estufa incluídos no Segundo Relatório de Avaliação do IPCC.

## Referências

Joos, F.; Bruno, M.; Fink R.; Siegenthaler U.; Stocker T.F.; Le Quéré, C.; and Sarmiento, J.L. An efficient and accurate representation of complex oceanic and biospheric models of anthropogenic carbon uptake. *Tellus* **48B**, 397-147

Houghton J.T.; Meira Filho, L.G.; Callander B.A.; Harris N.; Kattenberg A.; and Maskel K.– editors. *Climate Change 1995 – The Science of Climate Change – Second Assessment Report*. WGI – Intergovernmental Panel on Climate Change – IPCC. Cambridge University Press.